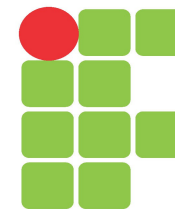


# Cálculo I

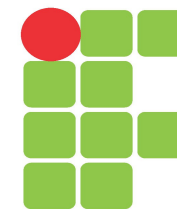
## Integração



**INSTITUTO FEDERAL**  
**BRASÍLIA**  
Campus Gama

# Determinação de primitivas

Definição: Uma função  $F$  é uma ***primitiva*** ou uma ***antiderivada*** de  $f$  em um intervalo  $I$  se  $F'(x) = f(x)$  para qualquer  $x$  em  $I$ .



# Exemplo 1

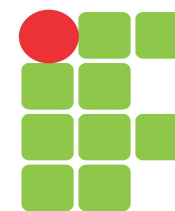
Determine uma primitiva para cada uma das seguintes funções:

$$a) f(x) = 2x$$

$$b) g(x) = \cos x$$

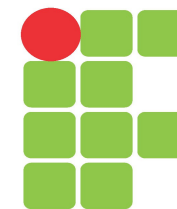
$$c) h(x) = \frac{1}{x} + 2e^{2x}$$

- A função  $F(x) = x^2$  não é a única função cuja derivada é  $2x$ . Para qualquer constante  $C$  arbitrária,  $x^2 + C$  também é.



# Teorema

Se  $F$  é uma primitiva de  $f$  em um intervalo  $I$ , então a primitiva mais geral de  $f$  em  $I$  é  $F(x) + C$ , onde  $C$  é uma constante arbitrária.



# Exemplo 2

- Determine uma primitiva de  $f(x) = 3x^2$  que satisfaça  $F(1) = -1$ .

# Exercícios

Determine a primitiva geral de cada uma das seguintes funções:

$$a) f(x) = x^5$$

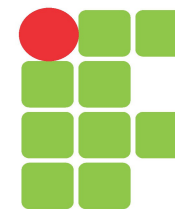
$$d) f(x) = \cos \frac{x}{2}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$e) f(x) = e^{-3x}$$

$$c) f(x) = \operatorname{sen} 2x$$

$$f) f(x) = 2^x$$

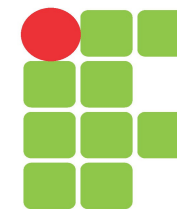


# Definição

- O conjunto de todas as primitivas de  $f$  é chamado de ***integral indefinida*** de  $f$  em relação a  $x$ , denotado por

$$\int f(x)dx$$

$\int$  é o sinal da integral. A função  $f$  é o integrando da integral e  $x$  é a variável de integração.



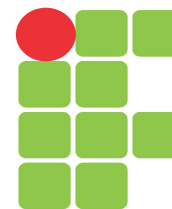
# Voltando ao exemplo 1

- Poderíamos escrever como:

$$a) \int 2x dx$$

$$b) \int \cos x dx$$

$$c) \int \left( \frac{1}{x} + 2e^{2x} \right) dx$$





# Tabela Sumária de integrais indefinidas

$$D_x(x) = 1$$

$$D_x\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right) = x^r (r \neq -1)$$

$$D_x(\text{sen } x) = \cos x$$

$$D_x(-\cos x) = \text{sen } x$$

$$D_x(\text{tg } x) = \sec^2 x$$

$$D_x(-\cot x) = \csc^2 x$$

$$D_x(\sec x) = \sec x \text{tg } x$$

$$D_x(-\csc x) = \csc x \cot x$$

$$\int 1 dx = \int dx = x + C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C (r \neq -1)$$

$$\int \cos x dx = \text{sen } x + C$$

$$\int \text{sen } x dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \text{tg } x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \cdot \text{tg } x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C$$

# Teorema

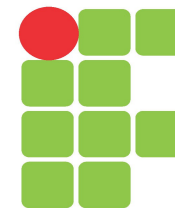
$$(i) \int [D_x f(x)] dx = f(x) + C$$

$$(ii) D_x \left[ \int f(x) dx \right] = f(x)$$

$$(iii) \int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$(iv) \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(v) \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$



# Exemplo 3

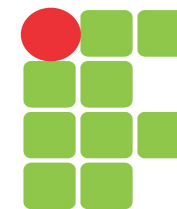
Calcule as integrais:

$$a) \int (5x^3 + 2 \cos x) dx$$

$$b) \int \left( 8t^3 - 6\sqrt{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt$$

$$c) \int \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} dx$$

$$d) \int \frac{1}{\cos u \cot u} du$$

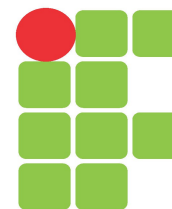


# Exemplo 4

- Resolva a equação diferencial

$$f'(x) = 6x^2 + x - 5$$

sujeita à condição inicial  $f(0) = 2$ .

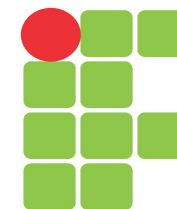


# Exemplo 5

- Resolva a equação diferencial

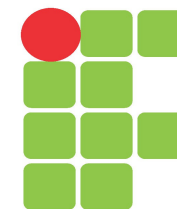
$$f''(x) = 5\cos x + 2\operatorname{sen}x$$

sujeita às condições iniciais  $f(0) = 3$  e  $f'(0) = 4$ .



# Exemplo 6

Um fabricante constata que o custo marginal (em reais) da produção de  $x$  unidades de uma componente de copiadora é dado por  $30 - 0,02x$ , sabendo que o custo marginal é a taxa de variação da função custo. Se o custo da produção de uma unidade é R\$ 35,00, determine a função custo e o custo da produção de 100 unidades.



# Mudança de variáveis em integrais indefinidas

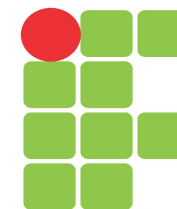
- **Método de substituição**

Se  $F$  é uma antiderivada de  $f$ , então

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Se  $u = g(x)$  e  $du = g'(x)dx$ , então

$$\int f(u)du = F(u) + C$$



# Exemplo 7

Calcular:

$$a) \int \sqrt{5x+7} dx$$

$$b) \int \cos 4x dx$$

$$c) \int x^2 e^{x^3} dx$$

$$d) \int \frac{2z}{\sqrt[3]{z^2+1}} dz$$

